

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 3, № 5 [1968], 511—522

УДК 513.83

О ЧИСЛЕ СИМПЛЕКСОВ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ КОМПЛЕКСОВ

М. Л. Громов

Рассматриваются комбинаторные инварианты конечного симплициального комплекса K , являющиеся функциями от чисел $\alpha_i(K)$ симплексов размерности i этого комплекса. Основным результатом является теорема 2, содержащая необходимое и достаточное условие для того, чтобы у двух комплексов K и L существовали такие подразделения K' и L' , что $\alpha_i(K') = \alpha_i(L')$ при $0 \leq i < \infty$. Из теоремы выводится следствие: если полиэдры $|K|$ и $|L|$ гомеоморфны, то существуют такие подразделения K' и L' , что $\alpha_i(K') = \alpha_i(L')$ при $i \geq 0$. Библиограф. 3 назв.

Введение. Пусть K — конечный симплициальный комплекс, и пусть $\alpha_i(K)$ — число i -мерных симплексов комплекса K . Спрашивается, какие функции от чисел α_i являются комбинаторными инвариантами комплекса K . Хорошо известно, что такими функциями являются эйлерова характеристика $\chi(K)$ и размерность $\dim K$.

Вопрос об инвариантности функций от чисел $\alpha_i(K)$ относительно подразделений имеет два аспекта. Во-первых, можно для индивидуального комплекса K изучать функции от чисел $\alpha_i(K)$, инвариантные относительно подразделений комплекса K . Во-вторых, интересно выяснить, когда с помощью функций такого рода можно установить, что некоторые два комплекса K и L комбинаторно не эквивалентны. Последний вопрос может быть сформулирован следующим образом: когда у двух комплексов K и L существуют подразделения K' и L' такие, что $\alpha_i(K) = \alpha_i(L)$ при всех $i \geq 0$?

Первому аспекту посвящена работа [2], в которой для каждого комплекса K указаны все линейные функции

от чисел $\alpha_i(K)$, инвариантные относительно подразделений комплекса K .

Ко второму аспекту относится следующий результат Р. Бинга [1]: у любых двух замкнутых протриангулированных трехмерных многообразий M_1 и M_2 существуют подразделения M'_1 и M'_2 такие, что $\alpha_i(M'_1) = \alpha_i(M'_2)$ при $i \geq 0$.

В настоящей работе получено необходимое и достаточное условие для того, чтобы у двух комплексов K и L существовали подразделения K' и L' такие, что $\alpha_i(K') = \alpha_i(L')$ при всех $i \geq 0$.

В дополнении 1 аналогичный результат сформулирован для случая более чем двух комплексов.

В дополнении 2 показано, как можно нашими методами получить основную теорему работы [2].

§ 1. Обозначения и формулировка результатов. Пусть K — конечный симплициальный комплекс и $|K|$ — соответствующий полиэдр. Через s_i мы будем обозначать как i -мерные симплексы комплекса K , так и соответствующие открытые симплексы полиэдра $|K|$. Обозначим через $C(K)$ пространство функций, аргументы которых суть симплексы комплекса K , а принимаемые значения принадлежат группе Z целых чисел. В дальнейшем эти функции мы будем называть *коцепями*. Носителем $\text{supp}(c)$ коцепи $c \in C(K)$ мы будем называть минимальный подкомплекс комплекса K такой, что если $s \in \overline{\text{supp}(c)}$, то $c(s) = 0$. Размерностью $\dim(c)$ коцепи c мы будем называть размерность ее носителя.

Пусть K' — подразделение комплекса K . Определим естественный гомоморфизм $\rho: C(K) \rightarrow C(K')$ следующим образом: если $s \in K$, а $s' \in K'$ и в полиэдре $|K|$ выполнено включение $s' \subset s$, то полагаем $\rho c(s') = c(s)$.

Если A — некоторое подмножество симплексов комплекса K , то через ψ_A мы будем обозначать характеристическую функцию множества A .

Для каждого целого числа i определим гомоморфизм $\Delta_i: C(K) \rightarrow C(K)$ следующими условиями: $\text{supp}(\Delta_i(c)) \subset \subset \text{supp}(c)$, а если $s \prec s_p$, то

$$\Delta_i \psi_{s_p}(s) = (-1)^{p+i+1} + \psi_{s_p}(s).$$

З а м е ч а н и е 1. Рассмотрим границу $\text{Vd}(s_q)$ дополнения симплекса s_q в комплексе K (см. [3]). Из определе-

ния гомоморфизма Δ_i тривиальным вычислением получается формула

$$\Delta_i \psi_K(s_q) = 1 + (-1)^{i+q+1} + (-1)^{i+q} \chi(\text{Bd}(s_q)). \quad (1)$$

В частности, если M есть n -мерное замкнутое h -многообразие, то $\Delta_n \psi_M = 0$.

З а м е ч а н и е 2. Каждую коцепь $c \in C(K)$ можно трактовать как функцию $f(k)$ на пространстве $|K|$, полагая $f_2(k) = c(s)$, если $k \in s \subset K$. Если даны две триангуляции K^1 и K^2 пространства $|K|$, то коцепи $\Delta_i \psi_{K^1}$ и $\Delta_i \psi_{K^2}$ совпадают как функции на пространстве $|K|$.

Для доказательства нужно воспользоваться формулой (1) и инвариантностью локальных групп гомологий.

Определим гомоморфизм $\chi: C(K) \rightarrow Z$ условием $\chi(\psi_{s_q}) = (-1)^q$. Ясно, что $\chi(\psi_K) = \chi(K)$. Обозначим через P пространство полиномов вида $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$, где a_i — целые числа, и определим гомоморфизм $\chi_0: C(K) \rightarrow P$ условием $\chi_0(\psi_{s_q}; x) = x^{q+1}$. Ясно, что

$$\chi_0(c; -1) = -\chi(c) \text{ и } \chi_0(\psi_K; x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(K) \cdot x^{i+1}.$$

Определим в группе $C(K)$ подмножество $C^*(K)$ следующим образом: нулевая коцепь принадлежит $C^*(K)$, а коцепь c размерности $n \geq 0$ принадлежит множеству $C^*(K)$ тогда и только тогда, когда найдутся симплексы $s_n^1, s_n^2 \in K$ такие, что $c(s_n^1) > 0$, а $c(s_n^2) < 0$.

З а м е ч а н и е 3. Пусть даны две триангуляции K^1 и K^2 пространства $|K|$ и две коцепи $c^1 \in C(K^1)$ и $c^2 \in C(K^2)$, совпадающие как функции на пространстве $|K|$, и пусть $c^1 \in C^*(K^1)$. Тогда $c^2 \in C^*(K^2)$.

Для доказательства нужно воспользоваться топологической инвариантностью размерности.

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. Пусть K — конечный комплекс и $c \in C(K)$. Для того чтобы у комплекса K существовало подразделение K' такое, что $\chi_0(\rho(c)) = 0$, где $\rho: C(K) \rightarrow C(K')$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\left. \begin{array}{l} c \in C^*(K), \chi(c) = 0 \\ \text{и если } n = \dim c, \text{ то } \Delta_n(c) \in C^*(K). \end{array} \right\} \quad (*)$$

Из теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы у двух конечных комплексов K и L существовали подразделения K' и L' такие, что $\alpha_i(K') = \alpha_i(L')$ при всех i , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\left. \begin{aligned} \dim K = \dim L = n, \chi(K) = \chi(L) \\ \text{и в пространстве } C(K \cup L) \text{ выполнено включение} \\ (\Delta_n \psi_K - \Delta_n \psi_L) \in C^*(K \cup L) \end{aligned} \right\} (**)$$

Доказательство. Применим теорему 1 к полиэдру $K \cup L$ и коцепи $c = (\psi_K - \psi_L) \in C(K \cup L)$. Применительно к коцепи c условия (**), эквивалентны условиям (*). С другой стороны,

$$\chi_0(c) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i+1} (\alpha_i(K) - \alpha_i(L))$$

и теорема 2 доказана.

Следствие 1. Пусть даны комплексы K, L и K_1, L_1 такие, что полиэдр $|K|$ гомеоморфен полиэдру $|K_1|$, а полиэдр $|L|$ гомеоморфен полиэдру $|L_1|$, и пусть $\alpha_i(K) = \alpha_i(L)$ при всех $i \geq 0$. Тогда у комплексов K_1 и L_1 существуют подразделения K'_1 и L'_1 такие, что $\alpha_i(K'_1) = \alpha_i(L'_1)$ при всех $i \geq 0$.

Для доказательства нужно воспользоваться замечаниями 2 и 3.

Следствие 2. Пусть даны два n -мерных замкнутых h -многообразия M_1 и M_2 такие, что $\chi(M_1) = \chi(M_2)$. Тогда у них существуют подразделения M'_1 и M'_2 такие, что $\alpha_i(M'_1) = \alpha_i(M'_2)$ при всех $i \geq 0$.

Для доказательства достаточно сослаться на замечание 1.

Следствие 3. Пусть дан комплекс K размерности n такой, что $\Delta_n(\psi_K) \in C^*(K)$, и пусть L такой комплекс, что $\dim L = \dim K$ и $\chi(L) = \chi(K)$. Тогда существуют подразделения K' и L' такие, что $\alpha_i(K') = \alpha_i(L')$ при всех $i \geq 0$.

Доказательство очевидно.

Замечание. Для любых целых чисел q и n таких, что $n \geq 0$, и если $n = 0$, то $q > 0$, существует комплекс K такой, что $\chi(K) = q$, $\dim K = n$ и $\Delta_n(\psi_K) \in C^*(K)$.

Доказательство. Если $n = 0$, то в качестве комплекса K нужно взять комплекс, состоящий из q вершин. Пусть $n > 0$. Обозначим через K_n комплекс, состоящий из трех n -мерных (замкнутых) симплексов, склеенных по $(n - 1)$ -мерной грани. Пусть L_q — одномерный комплекс такой, что $\chi(L_q) = q - 1$. В качестве комплекса K возьмем комплекс $K_n \cup L_q$. Проверка того, что комплекс $K = K_n \cup L_q$ обладает нужным свойством, тривиальна.

Последнее замечание и следствие 3 показывают, что, в некотором смысле, не существует комбинаторных инвариантов, кроме размерности и эйлеровой характеристики, которые бы являлись функциями от чисел $\alpha_i(K)$.

§ 2. Леммы о подразделениях. Для каждого целого k определим гомоморфизм $d_k : P \rightarrow P$ по формуле

$$d_k p(x) = p(x) + (-1)^k p(-1 - x).$$

Непосредственно проверяется, что

$$d_{l+1} \cdot d_k = 0, \quad d_{l+2} = d_k. \quad (2)$$

В группе P определим подгруппу P^n следующим условием: $p(x) \in P^n$ тогда и только тогда, когда $\deg p(x) \leq n$, $d_{n+1} p(x) = 0$ и значение $p(0)$ есть целое число.

ЛЕММА 1. Если $p(x) \in P^n$ и $p(0) = 0$, то $p(x) = x(x+1) \cdot q(x)$, где $q(x) \in P^{n-2}$.

Доказательство. Так как $d_{n+1} p(x) = 0$, то $p(-1) = p(0) = 0$, и поэтому $(x(x+1))^{-1} p(x) \in P$. При этом

$$d_{n-1}((x(x+1))^{-1} p(x)) = (x(x+1))^{-1} p(x) + (-1)^{n+1} (x(x+1))^{-1} p(-1-x) = (x(x+1))^{-1} d_{n+1} p(x) = 0.$$

Лемма доказана.

Пусть K — конечный комплекс. Обозначим через $\chi_1(K)$ многочлен $1 + \sum_{i=0}^{\infty} x^{i+1} \alpha_i(K)$. Заметим, что $\chi_1(K; x) = 1 + \chi_0(\psi_K; x)$. Рассмотрим соединение $K \circ L$ двух комплексов. Непосредственным вычислением проверяется формула

$$\chi_1(K \circ L) = \chi_1(K) \cdot \chi_1(L). \quad (3)$$

ЛЕММА 2. Пусть даны комплекс K , симплекс $s_1 \in K$, коцепь $c \in C(K)$ и число a , так что для любого симплекса $s \in \text{st}(s_1)$ мы имеем $c(s) = a$. Пусть K' — элементарное подразделение (см. [3]) комплекса K относительно симплекса s_1 , и пусть симплекс $s'_1 \in K'$ лежит в симплексе s_1 .

Пусть $\rho: C(K) \rightarrow C(K')$. Тогда

$$\text{Bd}(s_1) = \text{Bd}(s'_1)$$

и

$$\chi_0(\rho(c); x) = \chi_0(c; x) + ax(x+1)\chi_1(\text{Bd}(s_1); x).$$

Доказательство. Первая из приведенных формул очевидна, а вторая следует из формулы (3).

Определим гомоморфизм $\chi^*: C(K) \rightarrow P$ по формуле $\chi^*(c; x) = \chi^0(c; x) + \frac{1}{2}\chi(c)$.

ЛЕММА 3. Пусть K' — некоторое подразделение комплекса K , пусть $\rho: C(K) \rightarrow C(K')$ и пусть $c \in C(K)$. Тогда:

- а) $d_k \chi^*(c) = \chi^* \Delta_k(c)$;
- б) $\Delta_{k+1} \Delta_k(c) = 0$, $\Delta_k(c) = \Delta_{k+2}(c)$;
- в) $\chi(c) = \chi(\rho(c))$;
- г) $\Delta_k \rho(c) = \rho \Delta_k(c)$;
- д) если $\rho(c) \in C^*(K')$, то и $c \in C^*(K)$.

Доказательство. Формулы а), б), в), г) достаточно проверять для коцепей $c \in C(K)$ вида $c = \psi_s$, где $s \in K$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \chi_0(\Delta_k(\psi_{s_n}); x) &= (-1)^{n+l+1} \sum_{i=0}^n c_{n+1}^{i+1} x^{i+1} + x^{n+1} = \\ &= (-1)^{n+k+1} (1+x)^{n+1} + x^{n+1} + (-1)^{l+n}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \chi^*(\Delta_k(\psi_{s_n}); x) &= x^{n+1} + \frac{(-1)^n}{2} + (-1)^{l+n+1} (1+x)^{n+1} + \\ &+ \frac{(-1)^{l+n}}{2} = d_k \left(x^{n+1} + \frac{(-1)^n}{2} \right) = d_k \chi^*(\psi_{s_n}; x) \end{aligned}$$

и п. а) доказан.

Из п. а) и формулы (2) следует, что $\chi^* \Delta_{k+1} \Delta_k(\psi_s) = 0$, но, с другой стороны, если $s_i^1 < s$ и $s_i^2 < s$, то $\Delta_{k+1} \Delta_k \psi_s(s_i^1) = \Delta_{k+1} \Delta_k \psi_s(s_i^2)$, поэтому для любого $s_i \in K$ получаем $\Delta_{k+1} \Delta_k \psi_s(s_i) = 0$. Поскольку формула $\Delta_k = \Delta_{k+2}$ очевидна, то п. б) доказан.

Формула в) является следствием инвариантности эйлеровой характеристики комплексов относительно подразделений.

Обозначим через $|D_n|$ замыкание симплекса s_n в полиэдре $|K|$, и пусть D'_n — некоторое подразделение комплек-

са D_n . Обозначим через $\beta_i(s)$ число симплексов $s_i \in D_n'$ таких, что $s_i \succ s \in D_n'$ и $s_i \in \partial(D_n')$. Поскольку полиэдр $|D_n'|$ есть n -мерное многообразие с краем $|\partial(D_n')|$, имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i(s) = (-1)^n.$$

Применяя эту формулу к случаю, когда подразделение D_n' индуцировано подразделением K' комплекса K , получаем

$$\begin{aligned} \Delta_k \rho \psi_{s_n}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+i+1} \beta_i(s) + \rho \psi_{s_n}(s) = \\ &= (-1)^{n+l+1} + \rho \psi_{s_n}(s) = \rho \Delta_k \psi_{s_n}(s), \end{aligned}$$

и п. г) доказан. Для доказательства п. д) достаточно сослаться на замечание 3.

З а м е ч а н и е. Из п. а) леммы 3 и замечания 1 следует, что если M есть замкнутое n -мерное h -многообразие, то $2\chi^*(\psi_M; x) \in P^{n+1}$, а если через S^n обозначена n -мерная сфера и $\chi(M) = \chi(S^n)$, то $\chi_1(M) \in P^{n+1}$.

ЛЕММА 4. Пусть K_n — некоторая триангуляция сферы S^n . Тогда у комплекса K_n существуют подразделения K_n^1, \dots, K_n^l , где $l = \left[\frac{n+3}{2} \right]$, такие, что многочлены $\chi_1(K_n^i)$ при $1 \leq i \leq l$ порождают группу P^{n+1} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 0, 1$ утверждение леммы тривиально. Пусть теперь $n \geq 2$ и $K_{n-2}^1, \dots, K_{n-2}^l$ — подразделения сферы S^{n-2} такие, что полиномы $\chi_1(K_{n-2}^i)$ порождают группу P^{n-1} . Очевидно, что у комплекса K существует подразделение K_n' со следующими свойствами: найдутся одномерные симплексы $s_1^2, s_1^3, \dots, s_1^{l+1} \in K_n'$ такие, что для любого $i = 1, 2, \dots, l$ комплекс $\text{Bd}(s_1^{i+1})$ изоморфен комплексу K_{n-2}^i и, кроме того, $\text{st}(s_1^i) \cap \text{st}(s_1^j) = \emptyset$ при $i \neq j$. В качестве комплекса K_n^i при $i > 1$ мы возьмем элементарное подразделение комплекса K_n' относительно симплекса s_1^i . В силу леммы 2 при $i > 1$ получаем

$$\chi_1(K_n^i; x) = \chi_1(K_n'; x) + x(x+1)\chi_1(K_{n-2}^{i-1}; x).$$

Поскольку $\chi_1(K_n'; 0) = 1$ и в силу леммы 1 полиномы $\chi_1(K_n^i; x)$ при $1 \leq i \leq l+1$ порождают группу P^{n+1} , лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть K — конечный комплекс и $c \in C(K)$, причем $\dim c = n$. Пусть

$$\chi(c) = 0, \quad d_n \chi^*(c) = 0. \quad (4)$$

Предположим, кроме того, что существуют симплексы $s_n^\varepsilon \in K$, где $\varepsilon = 1, 2$, такие, что $c(s_n^1) = v_1 > 0$ и $c(s_n^2) = v_2 < 0$, и все коэффициенты многочлена $\chi_0(c; x)$ делятся на наибольший общий делитель v чисел v_1 и v_2 . Тогда существует такое подразделение K' комплекса K , что $\chi_0(\rho(c); x) = \chi^*(\rho(c); x) = 0$, где $\rho: C(K) \rightarrow C(K')$.

Доказательство. Из леммы 4 следует, что существует подразделение K^0 комплекса K со следующими свойствами:

все «новые» симплексы комплекса $\text{supp } \rho_0(c)$, где $\rho_0: C(K) \rightarrow C(K^0)$, лежат в объединении $s_n^1 \cup s_n^2$;

найдутся такие одномерные симплексы $s_1^{i, \varepsilon} \in K^0$, где $1 \leq i \leq l$ и $\varepsilon = 1, 2$, что $s_1^{i, \varepsilon} \subset \varepsilon_n^\varepsilon$, причем $\text{st}(s_1^{i, \varepsilon}) \cap \text{st}(s_2^{j, \varepsilon}) = \emptyset$ при $i \neq j$;

если через $B^d(s)$ обозначить границу дополнения симплекса s в комплексе $\text{supp } (\rho^0(c))$, то $\chi_1(B^d(s_1^{i, 1}); x) = \chi_1(B^d(s_1^{i, 2}); x)$ и многочлены $\chi_1(B^d(s_1^{i, 1}); x)$ при $1 \leq i \leq l$ порождают группу P^{n-1} .

Ясно, что $\Delta_n c(s_n^1) = \Delta_n c(s_n^2) = 0$, и поэтому

$$\chi_0(\rho_0 \Delta_n(c); x) = \chi_0(\Delta_n(c); x). \quad (5)$$

Тривиальное вычисление с использованием формул (4), (5) и пп. а), в) и г) леммы 3 приводит нас к формуле

$$d_n \chi_0(\rho_0(c); x) = 0. \quad (6)$$

Ясно также, что все коэффициенты многочлена $\chi_0(\rho_0(c); x)$ делятся на v . В силу (6) получаем

$$v^{-1} \chi_0(\rho_0(c); x) \in P^{n+1}. \quad (7)$$

Заметим, что $\chi_0(\rho_0(c); 0) = 0$ и обозначим $p_i(x) = \chi_1(B^d(s_1^{i, 1}); x) = \chi_1(B^d(s_1^{i, 2}); x)$. Из (7) и леммы 1 следует, что существуют такие целые неотрицательные числа a_i и b_i , где $1 \leq i \leq l$, что

$$\chi_0(\rho_0(c); x) = \sum_{i=1}^l (a_i v_1 + b_i v_2) x(x+1) p_i(x). \quad (8)$$

Если L — конечный комплекс и если s^1, s^2, \dots, s^k — одномерные симплексы комплекса L такие, что $\text{st}(s^i) \cap \text{st}(s^j) = \emptyset$ при $i \neq j$, и если p_1, p_2, \dots, p_k — неотрицательные целые числа, то через $L(s^1, p_1; s^2, p_2; \dots; s^k, p_k)$ обозначим подразделение комплекса L , определенное следующими условиями: $L(s^1, 0; s^2, 0; \dots; s^k, 0) = L$, а комплекс $L(s^1, q_1; \dots; s^i, q_i; \dots; s^k, q_k)$ получается элементарным подразделением комплекса $L(s^1, q_1; \dots; s^i, q_i; \dots; s^k, q^k)$ относительно какого-нибудь одномерного симплекса, содержащегося в симплексе s^i .

Положим теперь

$$K' = K^0(s_1^{1,1}, a_1; \dots; s_1^{l,1}, a_l; s_1^{1,2}, b_1; \dots; s_1^{l,2}, b_l).$$

Из леммы 2 следует

$$\chi_0(\rho(c); x) =$$

$$= \chi_0(\rho_0(c); x) + \sum_{i=1}^l (a_i v_1 + b_i v_2) x(x+1) p_i(x), \quad (9)$$

где $\rho: C(K) \rightarrow C(K')$. Из формул (8) и (9) следует, что $\chi_0(\rho(c); x) = 0$, но $\chi(\rho(c)) = \chi(c) = 0$, и поэтому $\chi_0(\rho(c); x) = \chi^*(\rho(c); x)$. Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Для любого натурального числа v существует гомоморфизм $r_v: P \rightarrow P$ со следующими свойствами:

а) $d r_v = r_v d$; $\deg r_v p(x) = \deg p(x)$ и если $\deg p(x) > 1$, то коэффициент при старшем члене многочлена $r_v p(x)$ делится на v ;

б) для любого конечного комплекса K существует подразделение $K(v)$ с гомоморфизмом $\rho_v: C(K) \rightarrow C(K(v))$, так что $\chi_0 \rho_v = r_v \chi_0$.

Доказательство. Определим гомоморфизм r_v следующими формулами:

$$r_v(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + (a_1 + (v-1)a_2)x + v a_2 x^2,$$

и если $n > 2$, то $r_v(x^n) = x r_v((x+1)^n - x^n)$.

Если $\dim K = 0$, то положим $K(v) = K$. Пусть $\dim K > 0$. Возьмем одномерный остов комплекса K и разобьем каждый его одномерный симплекс на v частей. Продолжим теперь это подразделение на весь комплекс K индукцией по остовам следующим образом: в качестве подразделения l -мерного симплекса s_l мы возьмем конус над подразделением границы симплекса s_l с вершиной в центре этого симплекса (заметим, что $K(1) = K$ и $K(2)$ есть барицентрическое подразделение).

Проверка того, что построенные гомоморфизм r_v и подразделение $K(v)$ обладают требуемыми свойствами, проводится автоматически.

С л е д с т в и е. Для любого натурального числа v и комплекса K существует такое подразделение K_v комплекса K , что гомоморфизм $\rho: C(K) \rightarrow C(K_v)$ обладает следующими свойствами: для любой коцепи $c \in C(K)$ такой, что $\chi(c) = 0$ и $d_i \chi^*(c) = 0$ при некотором i , все коэффициенты многочлена $\chi_0(\rho(c); x)$ делятся на v и $d_i \chi^*(\rho(c); x) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим последовательность подразделений: $K^1 = K(v)$, а $K^{i+1} = K^i(v)$. В качестве K_v возьмем подразделение K^n , где $n = \dim K$. Если $\rho: C(K) \rightarrow C(K_v)$, то из п. б) леммы 6 следует, что $\chi_0 \rho = (r_v)^n \chi_0$, но поскольку $\deg \chi_0(\rho(c); x) \leq n$ и $\chi_0(\rho(c); -1) = \chi \rho(c) = \chi(c) = 0$, то требуемое свойство многочлена $\chi_0(\rho(c); x) = (r_v)^n \chi_0(c; x)$ тривиально следует из п. а) леммы 6.

§ 3. Доказательство теоремы 1. Если $\chi_0(\rho(c); x) = 0$, то $\rho(c) \in C^*(K')$ и $\chi(\rho(c)) = 0$, так что необходимость условий (*) следует из пп. в), г) и д) леммы 3.

Пусть коцепь c , принадлежащая группе $C(K)$, удовлетворяет условиям (*), и пусть $\dim c = n$ и $\dim \Delta_n(c) = m$. Полагая $b = \Delta_n(c)$ и учитывая, что

$$\chi^*(c; 0) = -\chi^*(c; -1) = \frac{1}{2} \chi(c) = 0,$$

имеем

$$\chi(b) = 2\chi^*(b; 0) = 2d_n \chi^*(c; 0) = 0. \quad (10)$$

Из формулы (2) и пп. а) и б) леммы 3 следует, что

$$d_m \chi^*(b) = 0. \quad (11)$$

Поскольку $b \in C^*(K)$, найдутся симплексы s_m^1 и s_m^2 такие, что $b(s_m^1) = v_1 > 0$ и $b(s_m^2) = v_2 < 0$. Обозначим через v наибольший общий делитель чисел v_1 и v_2 . К комплексу K и числу v применим следствие леммы 6 и получим подразделение $K_1 = K_v$ с гомоморфизмом $\rho_1: C(K) \rightarrow C(K_1)$. В силу формул (10) и (11) к комплексу K_1 и коцепи $\rho_1(b)$ применима лемма 5, поэтому существует подразделение K_2 с гомоморфизмом $\rho_2: C(K) \rightarrow C(K_2)$, так что

$$\chi^* \rho_2(b) = 0. \quad (12)$$

Из пп. а) и г) леммы 3 и из формулы (12) мы получаем

$$d_n \chi^* \rho_2(c) = 0.$$

Проводя для коцепи $\rho_2(c)$ те же рассуждения, которые приведены выше применительно к коцепи b , мы получим подразделение K' с требуемым свойством.

Дополнение 1. ТЕОРЕМА 2а. Пусть K_1, K_2, \dots, K_p — конечные комплексы. Пусть $L = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_p$, и пусть для каждой из коцепей вида $\psi_{K_i} - \psi_{K_j} \in L$ выполнено условие (*). Тогда существуют подразделения K'_j комплексов K_j такие, что $\alpha_i(K'_{j_1}) = \alpha_i(K'_{j_2})$ при всех i и $1 \leq j_1, j_2 \leq p$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Дополнение 2. Рассмотрим подгруппу $P^{n,m} \subset P$, состоящую из таких многочленов $p(x)$, что $\deg p(x) \leq n$, а $\deg d_{n+1} p(x) \leq m$ и $p(0) = p(-1) = 0$. Пусть K — конечный комплекс и $c \in C(K)$. Рассмотрим всевозможные подразделения K^i комплекса K и гомоморфизмы $\rho_i: C(K) \rightarrow C(K^i)$; определим подмножество $P(c) \subset P$ как множество всех многочленов вида $\chi_0(\rho_i(c); x)$.

ТЕОРЕМА 1а. Пусть K — конечный комплекс и коцепь $c \in C(K)$ удовлетворяет условиям (*), причем $\dim c = n$ и $\dim \Delta_n(c) = m$. Тогда $P(c) \subset P^{n+1, m+1}$ и в группе $P^{n+1, m+1}$ существует подгруппа $P_c^{n+1, m+1}$ конечного индекса такая, что $P_c^{n+1, m+1} \subset P(c)$.

Доказательство этой теоремы выводится простыми рассуждениями из теоремы 1 и леммы 4.

Обозначим через Π линейное пространство многочленов с вещественными коэффициентами и с нулевым свободным членом. Пусть K — конечный комплекс. Все линейные функции от чисел $\alpha_i(K)$, инвариантные относительно подразделений комплекса K , образуют подпространство $\Pi^*(K)$ пространства Π^* , где Π^* — пространство, сопряженное с Π . Пространство $\Pi^*(K)$ является аннулятором подпространства $\Pi(K) \subset \Pi$, порожденного многочленами вида $p_1(x) - p_2(x)$, где $p_1(x), p_2(x) \in P(\psi_K)$.

В наших терминах основной результат работы [2] выглядит следующим образом.

Пусть K — конечный комплекс размерности, n и пусть $\dim \Delta_n \psi_K = m$. Тогда пространство $\Pi(K)$ совпадает с

линейной оболочкой, натянутой на многочлены $p(x)$, принадлежащие группе $P^{n+1, m+1}$.

Для доказательства этой теоремы нужно применить теорему 1а к комплексу, являющемуся объединением двух экземпляров комплекса K , и к коцепи, равной 1 на симплексах одного экземпляра комплекса и равной -1 на симплексах второго экземпляра.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступило
11.IX.1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] B i n g R. H., Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincare conjecture, Lectures on modern mathematics, ed. by T. L. Saaty, v. II (1964).
- [2] W a l l C. T. C., Arithmetic invariants of subdivision of complexes, *Canad. J. Math.*, 18, № 1 (1966), 92—96.
- [3] С т и н р о д Н., Э й л е н б е р г С., Основания алгебраической топологии, М., 1958.